DE SUPERFICIE,

CUJUS RADII OSCULI SUNT AEQUALES ET OPPOSITI,

DISSERTATIONEM

SCRIPSIT

ET AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS AUCTORITATE

PRO LOCO PROFESSIONIS PHILOSOPHIAE EXTRAORDINARIAE

RITE AUSPICANDO

D. XIV. DECEMBRIS A. MDCCCXXXIII

H. L. Q. C.

PUBLICE DEFENDET

ERNESTUS JULIUS SCHOLTZ

ASSUMPTO SOCIO

M. SADEBECK PHILOS. CAND.

Breslau

VRATISLAVIAE.

TYPIS OFFICINAE KUPFERIANAE.

Superficiem, quae aequales et oppositos habet radios osculi ill. Monge in libro suo: (application de l'analyse à la géométrie) disquisitioni analyticæ subjecit. Quum vero ex aequatione differentiali secundi ordinis, aequationem differentialem primi ordinis erueret, formulis quantitates imaginarias intermixtas esse invenit, quae quo minus longius procederet, impedirent. Hac re coactus, ut prohiberet, ne quis forma imaginaria ductus superficiem ipsam exstare negaret, relicto toto calculo ad constructionem vel generationem geometricam confugit. Ipse enim pag. 193 operis sui supra laudati dicit: „Il s'agiroit actuellement de construire cette intégrale, ou ce qui revient au même, de trouver la génération de la surface. La seule construction, à la quelle nous soyons encore parvenus, procéde par courbes infiniment voisines: elle prouve à la verité que l'aire de la surface n'est pas nulle, ce qui est d'ailleurs évident; mais elle ne peut être d'aucune utilité dans la pratique." —

Nescio quomodo factum sit, ut nemo, quantum mihi innotuit, operam collocaverit ad singulam quandam hujus generis superficiem inveniendam, qua alio modo, quam quo Monge usus est, probaretur, superficiem hujus generis exstare. Cum tam parum in hoc genere superficierum cognoscendo profectum esset, so-

cietas principis Jablonowski indagationem novam harum superficierum, ut praemio ornaretur, haud indignam habuit. Jam ipse huic rei operam aliquam impendi. Cum vero, quae ad id usque tempus, quo problematis solutio ad societatem Jablonowskianam, mittenda foret, elaborassem, leviora mihi viderentur, minusque exculta, et hoc ipso tempore calamitate domestica opprimerer, factum est, ut, quae tunc temporis scripta haberem, reponerem, eaque nunc demum depromta tradam, quae quantulacunque sint, ut lector benevole accipiat et indulgenter, quam maxime oro.

Si in quolibet superficiei cujusdam puncto X planum normale ponitur, idque circa lineam normalem tamquam circa axem circumverti putatur, varias in variis positionibus efficiet sectiones curvas, quae omnes punctum X transeunt, et in hoc ipso puncto radios osculi variae magnitudinis habent. Notum est, bina exstare plana normalia, sub angulo recto sese secantium, in quibus radius osculi alter sit maximus alter minimus, qui in geometria praecipue vocantur radii osculi superficiei. Quodsi superficies quaeritur, quae ita comparata sit, ut radios osculi habeat aequales simulque oppositos, aequatio prodit haec

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 \quad \ldots\ldots 1.$$

in qua, ut fere solet, x, y, z sunt coordinatae orthogonales et

$$p=\left(\frac{dz}{dx}\right);\; q=\left(\frac{dz}{dy}\right);\; r=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right);\; t=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \text{ et } s=\left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right).$$

Cum Monge et alii nonnisi formulas imaginarias invenissent, nec, quantum ego sciam, quisquam periculum fecerit annon superficies nostrae speciei aliam insuper formam induere possit, operae pretium esse videtur inquirere, num inter superficies nostri generis sit superficies rotatoria. Quemadmodum nempe conus, basi circulari exstructus, superficiebus et conicis et rotatoriis adnumerandus est, sic etiam superficies esse potest, quae cum nostrae sit speciei, tum etiam rotatoria sit.

Ad quaestionem hancce solvendam ut cum aequatione 1. aequatio superficierum rotatarum conjungatur necesse est. Axe coordinatae z in axe rotationis posito aequatio differentialis primi ordinis est

$$py=qx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

qua respectu ipsius x eademque etiam respectu ipsius y differentiata, prodeunt aequationes secundi ordinis hae

$$ry = sx + q \quad \ldots\ldots 3.$$

$$\text{et} \quad sy + p = tx \quad \ldots\ldots 4.$$

Ad superficiem cognoscendam satis erit curvam generatricem sive, quod idem est, curvam, quam planum quodcunque per axem rotatorium sive coordinatae z positum sectione efficit, investigasse. Calculum ut breviorem reddamus, planum illud simul axem x transiens ponamus, quo posito $y = 0$ fit, unde aequatio 2. ad $q = 0$ et deinde 3. ad $s = 0$, 4. ad $t = \frac{p}{x}$ reducuntur, et hanc ob causam aequatio 1. transit in $r + (1 + p^2)\frac{p}{x} = 0$, et cum sit $r = \frac{dp}{dx}$ (est enim nunc cum omnino sit $q = const. = 0$, $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{dp}{dx}$) $\frac{dp}{r(1+p^2)} + \frac{dx}{x} = 0$.

Integratio dat $lg\,\frac{x}{a} = lg\,\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}$; ubi a valor est ipsius x si $p = \infty$.

Deinde habemus $p = \pm\frac{a}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$, et cum sit $p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dz}{dx}$

$$z = \pm\, a\; lg\,\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}$$

Cum haec sit aequatio curvae generatricis in plano per axes coordinatarum x et z eunte, nil amplius opus est ad aequationem superficiei ipsius construendam nisi ut $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ loco quantitatis x substituatur.

$$\left.\begin{aligned} z &= \pm\, a\; lg\,\frac{\sqrt{(x^2+y^2)} + \sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{a} \\ \text{sive} \quad z &= \pm\, a\; lg\,\frac{u + \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 5.$$

si $\sqrt{(x^2 + y^2)} = u$ ponitur. Cum ex aeq. 5. etiam sit $a e^{\frac{z}{a}} = u + \sqrt{(u^2 - a^2)}$

e basin logarithmorum naturalium denotante exhibetur etiam $u = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$

sive $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2z}{a}} + e^{-\frac{2z}{a}} + 2\right)$

Ut nobis persuasum habeamus, revera superficiem aequatione 5. datam aequales habere oppositosque radios osculi, quaeramus quantitates p, q, r, s, t. Ex aeq. 5 redit $dz = \pm \frac{a\,du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}$, itaque

$$\left.\begin{aligned}
&p = \pm \frac{ax}{u\sqrt{(u^2 - a^2)}};\quad q = \pm \frac{ay}{u\sqrt{(u^2 - a^2)}}\\
&r = \pm \frac{a(y^4 - x^4 - a^2 y^2)}{u^3\sqrt{(u^2 - a^2)^3}},\ t = \pm \frac{a(x^4 - y^4 - a^2 x^2)}{u^3\sqrt{(u^2 - a^2)^3}}\\
&\qquad s = \pm \frac{axy\,(a^2 - zu^2)}{u^3\sqrt{(u^2 - a^2)^3}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 6.$$

His in aequatione 1., substitutis, et omnibus bene reductis aequatio fit identica, ut debebat.

Quod ad superficiei formam cognoscendam attinet, satis erit curvam generatricem investigasse, quo facto curvam notissimam, catenariam dico, inveniemus. Aequatio superficiei $u = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$ simul est aequatio curvae generatricis in qua z est parallela axi rotationis et coordinata u axi perpendicularis. Aequatio catenariae simplicissima (vide Poisson traité de Mécanique ed. sec. tom. I. pag. 571) prorsus eadem est, et ita quidem, ut axis noster rotationis sit axis horizontalis coordinatae z in catenaria, a vertice curvae linea a distans, et axis coordinatae u, quae in aequales curvam dividit partes, in catenaria sit linea verticalis. Curva catenaria igitur rotatione superficiem nostri generis gignit, si axis princeps curvae (qui ipsam in aequales partes dividit) axi rotationis perpendicularis insistit et vertex, in quo curva axi rotationis est proxima, ab hoc distat lineâ a.

Simul inde huic curvae proprietas existit, qua radius osculi aequalis sit lineae normali (siquidem axis horizontalis pro linea abscissarum habetur) et oppositus. Radius osculi catenariae reperitur $= \frac{u^2}{a}$, et a vertice, ubi minimum habet valorem $= a$, continenter crescit in infinitum.

Posteaquam superficiem rotatoriam nostrae speciei cognoverimus, deinde ad eandem redituri, nunc ad totum genus harum superficierum nos convertamus. Aequatio differentialis 1., nascitur ex aequatione $R + R' = 0$, ubi R et R' sunt radii osculi superficiei. Si vero radium osculi cujuscunque sectionis normalis in puncto quodam X superficiei litera B denotamus et litera B' radium osculatorem alius sectionis normalis in eodem puncto, cujus autem planum perpendiculare est plano alterius sectionis, etiam nunc erit $B + B' = 0$ siquidem est $R + R' = 0$. Alio enim loco*) demonstravi in quacun-

*) In dissertatione mea: de figura guttae cadentis in aëre resistente 1826. Demonstratio est haecce. Formula radii osculi curvae cujuscunque, ne exemtis quidem curvis duplicis curvaturae, est posito $dx = constanti$

$$B = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}}{\sqrt{((dy \,.\, d^2z - dz \,.\, d^2y)^2 + dx^2 \,.\, d^2z^2 + dx^2\, d^2y^2)}}$$

Fingamus, calculi contrahendi causa, initium coordinatarum positum in puncto considerato, atque z sumtum in ipsa normali hujus puncti et x et y in plano tangentiali. Nunc si contemplamur sectionem quandam superficiei et plani normalis sub angulo $= \vartheta$ versus axem coordinatae x inclinati, aequatio hujusce plani est $y = x \,.\, tg\, \vartheta$, qua bis differentiata, $dx = constanti$ sumto, est $dy = dx\, tg\, \vartheta$; $d^2x = 0$, $d^2y = 0$. Quibus valoribus in B substituto et $dz = 0$ posito, (propterea quod planum coordinatarum simul est planum tangentiale); prodit $B = \frac{dx^2 + dy^2}{d^2z} = \frac{dx^2}{d^2z \,.\, cos^2\, \vartheta}$. Maxime universalis pro superficie aequatio est differentialis $dz = p \,.\, dx + q \,.\, dy$, ubi $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ et $d^2z = r \,.\, dx^2 + 2s \,.\, dx \,.\, dy + t \,.\, dy^2$, ubi $r = \left(\frac{dp}{dx}\right)$; $s = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, $t = \left(\frac{dq}{dy}\right)$: p, q, r, s, t a figura tantum superficiei nequaqam vero a positione planorum secantium normalium pendent. Habemus inde $d^2z = dx^2 (r + 2s \,.\, tg\, \vartheta + t \,.\, tg^2\, \vartheta)$ igitur $\frac{1}{B} = r\, cos^2\, \vartheta + 2s \,.\, sin\, \vartheta\, cos\, \vartheta$

cunque superficie quantitatem $\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}$ a positione planorum normalium, sese invicem sub angulo recto secantium non pendere semperque in eodem puncto eundem praebere valorem, unde etiam $\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ sequitur, et porro $\frac{B+B'}{B.B'}=\frac{R+R'}{R.R'}$, ex quo elucet, si sit $R+R'=0$ etiam $B+B'=0$ esse oportere, et vice versa. Hinc deinde manifestum est, in nostram superficierum speciem nos incidere, si quaeramus superficiem, quae conditionibus satisfaciat, ut in quovis puncto radius osculi sectionis plani normalis, et (ut certi aliquid constituatur) plano coordinatarum x, y perpendicularis, aequalis sit et oppositus radio osculi alterius sectionis, cujus planum normale priori sit perpendiculare. Revera, si pro puncto, cujus coordinatae sunt x, y, z, litera β denotamus radium osculi cujuslibet sectionis normalis, litera B valorem radii β, si ejus sectio normalis simul perpendicularis insistit plano x, y, et litera B' valorem radii β, si ejus planum priori plano perpendiculare est: habemus, ut constat,

$$\beta=\frac{\sqrt{(dx_,^2+dy_,^2+dz_,^2)^3}}{\sqrt{\left\{(dy_,.d^2z_,^2-dz_,.d^2y_,^2)^2+dx_,^2.d^2z_,^2+dx_,^2d^2y^2\right\}}}$$

posito $d^2x_,=0$.

Aequatio plani normalis est $-(x-x_,)\left(\frac{dy}{dx}\right)+y-y_,+(z-z_,)\left(q_,-p_,\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)=0$ in qua $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ tangens trig. est anguli inter lineam sectionis plani cum plano x, y

---

$+\,t\,.\,sin^2\vartheta$. Eodem modo pro B', cujus planum curvaturae a plano coordinatarum x, z distat angulo $=90°+\vartheta$, obtinemus: $\frac{1}{B'}=r\,cos^2\,(90°+\vartheta)+2\,s\,.\,sin\,(90°+\vartheta)\,.\,cos\,(90°+\vartheta)+t\,.\,sin^2\,(90°+\vartheta)=r\,sin^2\,\vartheta-2\,s\,.\,sin\,\vartheta\,.\,cos\,\vartheta+t\,cos^2\,\vartheta$ et tandem $\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}=r+t$ in quo valore positio planorum secantium nullam habet vim. Laplacius in theoria sua phaenomenorum capillarium idem, sed de ellipsoide tantum evicit.

et inter axem coordinatae x. Si, ut primo B eruamus, planum normale plano x, y perpendiculare insistere debet, oportet poni $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left(\frac{dx_{,}}{dy_{,}}\right)$. Cum autem sit $dz_{,} = p_{,}dx_{,} + q_{,}dy_{,}$, et $dz_{,}$, ut valor quantitatis $\left(\frac{dx_{,}}{dy_{,}}\right)$ exhibeatur, evanescere debeat, habemus $\left(\frac{dx_{,}}{dy_{,}}\right) = -\frac{q_{,}}{p_{,}}$ ergo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{q_{,}}{p_{,}}$ et aequatio plani illius normalis reducitur ad $-(x - x_{,})\frac{q_{,}}{p_{,}} + y - y_{,} = 0$

unde differentiando prodit $dy = \frac{q_{,}}{p_{,}}dx$; $d^2y = 0$. His in β positis et substituto $dz = p_{,}dx + q_{,}dy = dx\,(p_{,} + q_{,}\frac{dy}{dx}) = dx\,(p_{,} + q_{,}\frac{q_{,}}{p_{,}}) = dx\,\frac{(p_{,}^2 + q_{,}^2)}{p_{,}}$ prodit

$$B = \frac{dx^2\,(p_{,}^2 + q_{,}^2 + (p_{,}^2 + q_{,}^2)^2)^{\frac{3}{2}}}{p_{,}^2 . d^2z\sqrt{(p_{,}^2 + q_{,}^2)}}$$

$$= \frac{dx^2\,(1 + p_{,}^2 + q_{,}^2)^{\frac{3}{2}}\,(p_{,}^2 + q_{,}^2)}{p_{,}^2 . d^2z}$$

Quum vero sit $d^2z = d\,(p\,dx + q\,dy) = r\,dx^2 + 2\,s\,dx.dy + t\,dy^2$ propter $d^2x = d^2y = 0$, et porro $\frac{dy}{dx} = \frac{q_{,}}{p_{,}}$, habemus $d^2z = \frac{dx^2\,(r\,p_{,} + 2\,s\,p_{,}q_{,} + t\,q_{,}^2)}{p_{,}^2}$ et

$$B = \frac{(1 + p_{,}^2 + q_{,}^2)^{\frac{3}{2}}.(p_{,}^2 + q_{,}^2)}{r_{,}p_{,} + 2\,s_{,}p_{,}q_{,} + t_{,}q_{,}}$$

quia in puncto $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, quantitates x, y, z, p, q, r, s, t, aequales sunt quantitatibus $x_{,}, y_{,}, z_{,}, p_{,}$ etc. et alterae cum alteris commutari possunt. Positio alterius plani, priori perpendicularis, ita comparata est, ut per lineam rectam eat, quae sectionem, cujus planum plano x, y est parallelum, tangat, unde facile sequitur, in aequatione generali ponendum esse $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy_{,}}{dx_{,}}\right) = -\frac{p_{,}}{q_{,}}$ et ipsam transire in hanc

$$(x - x_{,})\,p_{,} + (y - y_{,})\,q_{,} + (z - z_{,})\,(p_{,}^2 + q_{,}^2) = 0.$$

Differentiata dat

$$p_{,} dx + q_{,} dy + (p_{,}^2 + q_{,}^2)\, dz = 0 \text{ et, } dx = Const \text{ posito}$$
$$q_{,}\, d^2 y + (p_{,}^2 + q_{,}^2)\, d^2 z = 0.$$

His in β positis habemus, quia $dz = 0$ et $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy_{,}}{dx_{,}}\right) = -\frac{p_{,}}{q_{,}}$,

$$B' = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}}{\sqrt{(dy^2 . d^2 z^2 + dx^2 d^2 z^2 + dx^2 d^2 y^2)}} = \frac{dx^2 \sqrt{(p_{,}^2 + q_{,}^2)^3}}{q_{,}^2 . d^2 z_{,} \sqrt{(p_{,}^2 + q_{,}^2 + (p_{,}^2 + q_{,}^2)^2)}}$$
$$= \frac{dx^2\,(p_{,}^2 + q_{,}^2)}{q_{,}^2 . d^2 z_{,} \sqrt{(1 + p_{,}^2 + q_{,}^2)}}$$

Cum porrosit $d^2 z = r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2 + q d^2 y$

$$= dx^2 \left(r - 2 s \frac{p_{,}}{q_{,}} + t \frac{p_{,}^2}{q_{,}^2}\right) - q . \frac{(p_{,}^2 + q_{,}^2)}{q_{,}} d^2 z$$

et denique x, y, z, p, q, r, s, t aequalia ponenda sint $x_{,}, y_{,}$, etc.: evadit

$$d^2 z = dx^2 \left(\frac{r p^2 - 2 s p q + t p^2}{q^2}\right) - (p^2 + q^2)\, d^2 z, \text{ itaque}$$

$$d^2 z = \frac{dx^2\,(r q^2 - 2 s p q + t p^2)}{q^2\,(1 + p^2 + q^2)} \text{ unde prodit}$$

$$B' = \frac{(p^2 + q^2)\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}{r q^2 - 2 s p q + t p^2}$$

Quodsi nunc B et B' in summam colligimus, habemus

$$B + B' = (p^2 + q^2)\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} \left(\frac{1 + p^2 + q^2}{r p^2 + 2 s p q + t q^2} + \frac{1}{r q^2 - 2 s p q + t p^2}\right)$$

Fractionibus parenthesi inclusis in unam contractis numerator fit

$$= r\,(q^2 + q^2 p^2 + q^4 + p^2) - 2 s p q\,(p^2 + q^2) + t\,(p^2 + p^2 q^2 + p^4 + q^2)$$
$$= (p^2 + q^2)\left(r\,(1 + q^2) - 2 s p q + t\,(1 + p^2)\right) \text{ et denique}$$

$$B + B' = \frac{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} . (p^2 + q^2)^2 \left(r\,(1 + q^2) - 2 s p q + t\,(1 + p^2)\right)}{(r p^2 + 2 s p q + t q^2)\,(r q^2 - 2 s p q + t p^2)}$$

Patet inde $B + B'$ non aliter $= 0$ esse posse quam si sit

$$r\,(1 + q^2) - 2 s p q + t\,(1 + p^2) = 0$$

quae aequatio una eademque est, quam aequatio $R + R' = 0$ praebet.

Quandoquidem in superficie nostra non solum radii osculi R et R' inter se sunt aequales et oppositi, sed etiam radii osculi B et B' in sectione quacunque normali, dummodo planum sectionis alterum alteri insistat perpendiculare, ad naturam horum radiorum amplius cognoscendam sufficiet unum eorum contemplari. Meditantibus de positione radiorum R et R' (qui praecipue nominantur radii osculi superficiei) obvium est, sectiones curvas, quibus illi respondeant, concavitatem alteram ab altera avertere, ita ut planum tangens in oppositis partibus habeat has sectiones. Porro R aut R' ut valor singularis quantitate generali B aut B' continetur. Concipiamus planum normale fixum, cui R ex. gr. respondeat, et aliud praeterea planum, idque mobile, paullatim circum normalem tamquam circum axem verti, simulque radium osculi B, sectione hujus plani in quavis positione oriundum contemplemur. Radius ille a valore R, quem habebat in positione initiali, alios pedetentim atque alios acquiret valores, donec planum eo usque versum sit, ut angulum rectum faciat cum plano fixo, et sectionem procreet, cujus radius osculi sit R', qui aequalis et oppositus est radio R. Transitus radii B a valore singulari R usque ad alterum R', qui priori R est aequalis, signo vero opposito praeditus, monstrat, non alio modo signi mutationem fieri posse, nisi ita, ut B aut per 0 aut per quantitatem infinite magnam ex uno signo in alterum transeat, simulque planum in ea positione, ubi hoc fiat, sectionem curvam puncto flexus contrarii insignitam efficiat. Facile jam e natura superficiei, quippe quae radios osculi habeat aequales et oppositos, suspicari possumus, radium B nunquam fieri posse $= 0$, et mutationem signi non nisi per valorem infinite magnum effici. Jam hoc demonstremus et deinde evincamus revera sectionem plani normalis in ea positione, in qua sit $B = \infty$, punctum habere flexus contrarii.

Expressio generalis radii osculi cujuscunque curvae, in spatio sitae, supra litera β notata est, qui, si valorem infinite magnum acquirere debet, denominatorem ipsius β evanescere oportet

$$(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + dx^2\, d^2z^2 + dx^2\, d^2y^2 = 0$$

quae aequatio non alio modo solvi potest, quam si $d^2z = d^2y = 0$ ponatur, unde etiam $d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx.dy + t\,dy^2 = 0$ et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{1}{t}\sqrt{(s^2 - rt)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A.$$

prodit. Quantitas $\frac{dy}{dx}$ est tang. trig. anguli inter axem x et projectionem lineae rectae, quae sectionem normalem, in qua radius osculi est infinite magnus, tangit. Haec quantitas $\frac{dy}{dx}$ semper erit realis, si $s^2 - rt$ nunquam habet valorem negativum. Ex aequatione vero superficiei nostrae habemus

$$r = \frac{2spq - t(1 + p^2)}{1 + q^2}, \text{ quo substituto prodit}$$

$$s^2 - rt = \frac{s^2 + s^2q^2 - 2pqst + t^2 + t^2p^2}{1 + q^2}$$

$$= \frac{(sq - pt)^2 + s^2 + t^2}{1 + q^2}$$

quantitas semper positiva. Inde elucet, in quovis puncto superficiei nostrae duas exstare positiones plani normalis, in quibus radius osculi fiat infinite magnus. Jam ex eo, quod $B + B' = 0$, et quod, $B = \infty$ posito, etiam B', quamquam signo contrario praeditum, in infinitum crescere debet, perspicitur, positionem utriusque plani ita esse comparatam, ut alterum secet alterum sub angulo recto. Idem etiam formulae docent. Calculi contrahendi causa ponamus planum x, y in planum tangentiale puncti X, quod contemplamur, translatum, coordinatasque ipsas ab hoc puncto oriri, ita ut coordinatae in plano tangentiali concipiantur et z eidem sit perpendiculare. His positis linea tangens sectionem normalem in plano x, y erit et cum projectione sua congruet, et angulus ϑ, quem cum axe x includit, (quem simul aequalem esse intelligimus angulo inter planum x, z et planum normale, in quo radius est $= \infty$) tangentem habebit trigon.

$$= \frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{1}{t}\sqrt{(s^2 - rt)}.$$

Cum vero sit $dz = 0$ et $p = q = 0$, quia planum x, y in plano tangentiali posuimus, aequatio 1. superficiei reducitur ad $r + t = 0$ sive $t = -r$, unde prodit

$$tg\,\vartheta = \frac{s}{r} \pm \frac{1}{r}\sqrt{(s^2 + r^2)}.$$

Denotantibus ϑ' angulum unum, cujus tangens

$= \frac{s}{r} + \frac{1}{r}\sqrt{(s^2+r^2)}$ et ϑ' alterum cujus tangens est $=$

$\frac{s}{r} - \frac{1}{r}\sqrt{(s^2+r^2)}$ productum utriusque tangentis dat

$tg\,\vartheta'.\,tg\,\vartheta_{,} = 1$, unde $\vartheta' - \vartheta_{,} = \pm\,90°$.

Superest, ut doceamus hanc sectionem normalem, in qua radius osculi est infinite magnus, punctum habere flexus contrarii. Cum jam planum x, y in plano tangentiali posuerimus, nunc etiam planum x, z in eo plano ponamus, in quo radius est $= \infty$. Quo posito aut ϑ' aut $\vartheta_{,} = 0$, sive $tg\,\vartheta'$ aut $tg\,\vartheta_{,} = 0$ faciendum est, unde prodit $\frac{s^2}{r^2} = \frac{s^2+r^2}{r^2}$, $s^2 = s^2 + r^2$, $r = 0$, atque ita etiam $t = 0$, quia $r = -t$ reperiebatur. Sectio normalis ipsa, quam contemplamur, solis coordinatis x, z exprimetur, cum $y = Const. = 0$ sumenda sit. In ipso puncto X, a quo nobis proficiscendum est, omnes tres coordinatae sunt $= 0$. Si aliud punctum X' puncto X proximum, cujus coordinatae sint Δx, $y = 0$, et Δz, contemplamur, inveniemus esse

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et eodem modo reperiemus pro puncto X' cujus coordinatae sint $-\Delta x$, $y=0$, et $\Delta z'$

$$\Delta z' = -\left(\frac{dz}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Delta x^2}{1.2} - \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Quoniam autem e positione planorum coordinatarum et e natura superficiei sequitur $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = 0$ et $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r = 0$, habemus $\Delta z = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ et $\Delta z' = -\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ Hinc patet, curvam sectionis normalis, in qua radius osculi est infinite magnus, in vicinitate proxima puncti X in partes oppositas a plano tangentiali, ideoque a linea tangentiali abire, unde manifestum est, punctum X esse punctum flexus contrarii. Cum radii osculi sectionum normalium valorem induere possint infinite magnum eumque et positivum et negativum, valor R vel R', qui aut minimus est aut maximus, non intelligendus est absolute

maximus aut absolute minimus, sed ita tantum, ut conditioni satisfaciat, ut major sit quam proximi aut minor. Si, ut jam antea fecimus, planum normale circa normalem paullatim vertimus, ab eo plano exeuntes ubi radius est infinite magnus: angulo, quem planum mobile cum fixo includit, movendoque describit, et quem ϑ vocemus, crescente radius positivus decrescet, donec alicubi inter $\vartheta = 0$ et $\vartheta = 90^\circ$ adipiscatur valorem minimum positivum R. Deinde rursus continenter crescet usque ad $\vartheta = 90^\circ$, ubi fiet infinite magnus subitoque in negativum transibit. Signo inde semper negativo praeditus, valorem absolutum habebit decrescentem, ϑ amplius crescente, usque ad punctum quoddam inter $\vartheta = 90^\circ$ et $\vartheta = 180^\circ$, ubi valor ille absolutus est minimus et quidem $= R$, atque ita radius $R' = -R$, cum habeat signum negat. erit maximus. ϑ jam amplius aucto valor absolutus rursus crescet, donec, *si* $\vartheta = 180^\circ$, fiat $= \infty$ et radius ipse $= -\infty$, ubi rursus in positivum transit.

Videamus, quid e prioribus in superficiem rotatoriam redundet. Ut situm plani normalis, in quo radius est infinitus, indagemus, positionem tangentis ad curvam sectionis ductae definiemus. Projectio hujus tangentis angulum, quem litera φ denotemus, cum axe coordinatae x includit, cujus tangentem trigon. aequatione A. invenimus

$$tg\ \varphi = \frac{dy}{dx} = -\ \frac{s}{r} \pm \frac{1}{t} \sqrt{(s^2 - rt)}$$

in quo r, s, t, quae in aequatt. 6. exprimuntur, substituenda sunt. Si brevitatis causa $x^4 - y^4 - a^2 x^2 = M$, $y^4 - x^4 - a^2 y^2 = N$ et $u^3 \sqrt{(u^2 - a^2)^3} = D$ ponimus, erit $r = \frac{aN}{D}$; $t = \frac{aM}{D}$, $s = -\ \frac{axy(2u^2 - a^2)}{D}$. Est autem etiam

$$M = x^2 (u^2 - a^2) - u^2 y^2 \quad \text{et} \quad N = y^2 (u^2 - a^2) - u^2 x^2$$

et habebimus

$$tg\ \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{xy(2u^2 - a^2)}{M} \pm \frac{1}{M} \sqrt{\left\{ x^2 y^2 ((u^2 - a^2) + u^2)^2 - MN \right\}}$$

Omnibus bene reductis invenietur, quantitatem $\{ \ldots\ldots \}$ contrahi in $\{ \ldots\ldots \} = u^6 (u^2 - a^2)$ et igitur fieri

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy(u^2-a^2) + xyu^2 \pm u^3\sqrt{(u^2-a^2)}}{M}$$

Nominatorem valoris $\frac{dy}{dx}$ reperiemus porro esse $= (y\sqrt{(u^2-a^2)} \pm ux)(x\sqrt{(u^2-a^2)} \pm uy)$, et M dissolvi potest in $(x\sqrt{(u^2-a^2)} - uy)(x\sqrt{(u^2-a^2)} + uy)$, unde prodit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{(u^2-a^2)} \pm ux}{x\sqrt{(u^2-a^2)} \mp uy} = tg\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \quad B.$$

Sit ϑ angulus inter axem x et inter lineam in plano x, y sectione plani per axem z et punctum X positi ortam, et ω angulus, quem illa linea cum projectione tangentis includit. His praemissis est $\omega = \varphi - \vartheta$, $tg\,\omega = \frac{tg\,\varphi - tg\,\vartheta}{1 + tg\,\varphi\, tg\,\vartheta}$ ubi $tg\,\vartheta = \frac{y}{x}$, et omnibus bene reductis prodit $tg\,\omega = \pm\frac{u}{\sqrt{(u^2-a^2)}} = \pm\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-a^2}}$

In plano z, x, ubi $y = 0$, fit $tg\,\omega = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = tg\,\varphi$. Concipiamus nunc curvam generatricem quae huic plano respondet, et tangentem ad eam ductam in puncto X, eamque productam usque ad punctum T, ubi planum x, y secat, deinde angulum ψ inter TX et lineam abscissarum inclusum, et qui datus est tangente sua $= p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$. Porro sit Y projectio puncti X in plano x, y, atque ita $XY = z$ et XV linea sectionem normalem illam (quae habet in X punctum flexus contrarii radiumque osculi infinite magnum) tangens usque ad V ubi in planum x, y incidit, producta, et igitur $Y\,V$ ejus projectio. Habebimus $TX = \frac{TY}{\cos\psi}$, et cum sint $TYV = \varphi = \omega$ et $YTV = XTV = 90°$, $TV = TY.\,tg\,\varphi$ et inde $TV = TX.\cos\psi.\,tg\,\varphi$. Est autem, cum in puncto X sit $y = 0$ $tg\,\psi = \frac{a}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, $\cos\psi = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x}$, $tg\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, itaque $\cos\psi.\,tg\,\varphi = 1$ et $TV = TX$, et cum XTV sit angulus rectus, invenitur $TXV = 45°$. In quovis igitur puncto superficiei nostrae rotatoriae, curva sectionis normalis, in qua radius osculi est infinite magnus vel in qua est punctum flexus contrarii, curvam

generatricem per idem punctum euntem sub angulo semirecto secat. Idem et alio modo nobis persuadere possumus. Quoniam enim in toto superficierum genere in quolibet puncto binae sunt sectiones normales sese invicem secantes, quae radium habeant infinite magnum, tum autem, quum superficies est rotatoria, planum quodcunque per axem rotationis positum superficiem in curva generatrice ita secat, ut omnia ab utraque plani parte sint prorsus aequalia, necesse est, ut idem planum, angulum quoque illum rectum, quem plana illa normalia, quae radios infinite magnos continent, includunt, in aequales dividat partes, unde elucet, in quovis puncto tangentes curvae generatricis et sectionis illius normalis, cui radius osc. est infinite magnus, angulum rectnm dimidium includere.

Operae pretium esse videtur, curvam in superficie investigare, quae oritur, si a puncto quodam certo ad libitum assumto proficiscentes ad proximum in ea directione procedimus, quae sectioni normali respondet, cujus radius osculi est infinite magnus, et ita continuo a singulo quoque puncto ad sequens pergimus. Curvam si jam delineatam in superficie nobis fingimus, tangentemque in puncto quodam ad eam ductam, ipsa directionem indicat illam, de qua modo diximus, et ejus projectio tangit projectionem curvae. Angulus autem φ, quem haecce cum axe coordinatae x includit, datus est formula $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{1}{t}\sqrt{(s^2 - rt)}$, in qua, si r, t, s ex aequatione superficiei, siquidem data est, haustae substituuntur, simulque z pellitur, $\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t} \pm \frac{1}{t}\sqrt{(s^2 - rt)}$ erit aequatio differentialis projectionis curvae nostrae.

Quod ad superficiem rotatoriam attinet, valorem ipsius $\frac{dy}{dx}$ jam aequatione B expressum habemus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{(u^2 - a^2)} \pm ux}{x\sqrt{(u^2 - a^2)} \mp uy}$$

unde $(x\,dy - y\,dx)\sqrt{(u^2 - a^2)} = \pm u\,(x\,dx + y\,dy)$

et cum $x\,dy - y\,dx = x^2 . d\left(\frac{y}{x}\right)$ et $x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}\,u\,du$, aequatio praecedens aequatione

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{(u^2-a^2)} = \pm \tfrac{1}{2} u^2 \sqrt{(u^2-a^2)}$$

divisa transibit in

$$2 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \pm \frac{du}{\sqrt{(u^2-a^2)}} \quad \text{sive}$$

$$\frac{2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \pm \frac{du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}.$$

Integratio suppeditat

$$2\, arc\,(tg = \frac{y}{x}) + Const. = \pm\, lg\left(\frac{u+\sqrt{(u^2-a^2)}}{a}\right)$$

Si α, β, γ sunt coordinatae puncti in superficie, a quo usque curvam descriptam esse constituimus, constans arbitraria invenitur aequatione

$$2\, arc\,(tg = \frac{\beta}{\alpha}) + Const. = \pm\, lg\, \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-a^2)}}{a}$$

unde, si etiam $\alpha^2+\beta^2=\eta^2$ ponitur, aequatio projectionis erit

$$arc\,(tg = \frac{y}{x}) - arc\,(tg = \frac{\beta}{\alpha}) = \pm\, lg\, \frac{u+\sqrt{(u^2-a^2)}}{\eta+\sqrt{(\eta^2-a^2)}}.$$

Altera aequatio est ipsa aequatio superficiei. Facile perspicitur, signum duplex duabus curvae partibus respondere, quae inter se nullo modo sint diversae; itaque, uno oppresso, altero tantum utamur. Deinde cum curva planum x, y secet in puncto, quo $z=0$, $u=a$, hoc ipsum punctum pro eo habere licet, a quo curva prodeat, et propter superficiei rotatoriae symmetriam circa planum per axem z et punctum quodcunque positum, punctum, cujus coordinatae erant α, β, γ, ita assumere possumus, ut sit $\alpha = a$, et $\beta = \gamma = 0$. Aequatio projectionis erit

$$arc\,(tg = \frac{y}{x}) = \tfrac{1}{2}\, lg\left(\frac{u+\sqrt{(u^2-a^2)}}{a}\right)$$

Lineam quae punctum quoddam in plano x, y cum initio coordinatarum conjungit, $\sqrt{(x^2+y^2)}$, jam litera u denotavimus, et si etiam ϑ angulum significat inter u et axem coordinatae x, aequatio fiet

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\, lg\, \frac{u+\sqrt{(u^2-a^2)}}{a}$$

unde etiam $a e^{2\vartheta} = u + \sqrt{(u^2 - a^2)}$, et omnibus bene reductis

$$u = \frac{a}{2}\left(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta}\right).$$

Cum ex aequatione superficiei sit $lg. \frac{u + \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a} = \frac{z}{a}$, prodit etiam aequatio simplex:

$$2 a \vartheta = z .$$

Aequatio haec facile construi potest. Si quidem cylindrum, cujus axis sit axis rotationis, basi circulari, quae radium habeat a, exstructum fingimus, et deinde a quovis lineae curvae puncto lineas axi rotationis perpendiculares ducimus, curva, quae intersectione linearum perpendicularium et superficiei cylindraceae oritur, et quam projectionem cylindraceam vocemus, ita comparata erit, ut ejus coordinata n, axi parallela, aequalis sit z, et si arcum $a\vartheta$ tamquam abscissam in basi circulari cylindri sumtam contemplamur, semper habebimus $2 . a\vartheta = z = n$, unde patet, curvae nostrae projectionem cylindraceam esse lineam cochleae in cylindro descriptam, cujus tangens erga planum basis eodem semper angulo, cui tangens trigonom. *sit* $= 2$, inclinata sit. — Ceterum monere liceat, curvam nostram ipsam, cum omnes curvas generatrices sub eodem angulo $= 45°$ secet, inter loxodromicas habendam esse, siquidem non dubitamus notionem linearum loxodromicarum eo usque amplificare, ut cuivis lineae in qualibet superficie rotatoria delineatae, quae sub angulo dato omnes curvas generatrices secet, nomen loxodromicae tribuatur.

C o r r i g e n d a

pag. 4 linea 11 loco r legendum est p
— 5 — 8 — z — — 2
— 7 — 14 denominator quantitatis β est $= \sqrt{\{(dy_{,}d^2z_{,} - dz_{,}d^2y)^2 + dx_{,}^2.d^2z_{,}^2 + dx_{,}^2.d^2y_{,}^2\}}$
— 8 — 11 loco $rp_{,}$ legendum est $rp_{,}^2$
— 8 — 12 denominator quantitatis B' est $= r_{,}p_{,}^2 + 2s_{,}p_{,}q_{,} + t_{,}q_{,}^2$
— 16 — 11 inter $\frac{+}{-}$ et lg ponendum $\frac{1}{2}$.